

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ
ШКОЛЬНИКОВ 2024/2025 УЧЕБНОГО ГОДА

ПО МАТЕМАТИКЕ

Код/шифр участника

M	1	0	-	2			
---	---	---	---	---	--	--	--

Муленков Даниэль Владимирович

(фамилия, имя, отчество)

10 "А"

(класс обучения)

10 "А"

(класс участия)

~~МБОУ "ОУ. Амурск"~~

МБОУ "ОУ. Гармония"

(полное наименование образовательной организации)

10.1.

М10-2

После заполнения бассейна наполовину, первая труба работала 3 ч,
а вторая — 12 ч.

Возьмем за x — время набора первой половины бассейна. Всеми трубами
Тогда первая труба завершила наполнение через $x+3$ ч, а вторая —
через $x+12$ ч. Обеих жидкостей оказалось поровну от разных труб, значит
каждая труба наполнила $\frac{1}{2}$ бассейна. Можем посчитать скорость ~~на~~ набора
воды от каждой трубы: ^{составляет} скорость первой трубы $\frac{1}{2} : (x+3) = \frac{1}{2(x+3)}$ бассейна в час,
а второй трубы составляет $\frac{1}{2} : (x+12) = \frac{1}{2(x+12)}$ бассейна в час. Выходит, что
вторую половину бассейна первая труба наполнила на $\frac{1}{2(x+3)} \cdot 3$; а вторая — на

$$\frac{1}{2(x+12)} \cdot 12.$$

Составим и решим уравнение:

$$\frac{1}{2(x+3)} \cdot 3 + \frac{1}{2(x+12)} \cdot 12 = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{3}{2(x+3)} + \frac{12}{2(x+12)} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{3}{x+3} + \frac{12}{x+12} = 1.$$

$$3(x+12) + 12(x+3) = (x+3)(x+12)$$

$$3x + 36 + 12x + 36 = x^2 + 3x + 12x + 36.$$

$$36 = x^2$$

$x = 6$. ч наполнилась первая половина бассейна всеми трубами.

$\frac{1}{2}$ бассейна наполнила первая труба за $6+3 = 9$ ч, значит первая труба
наполнит бассейн за $2 \cdot 9 = 18$ ч.

Ответ: 18 ч.

10.4. Для трёх последовательных чисел в арифметической прогрессии выполняется это тождество:

$$a_1 + a_3 = 2a_2.$$

Доказательство тождества:
 $a_1 + a_1 + 2d = 2a_1 + 2d$
 $a_1 + (a_1 + 2d) = 2(a_1 + d)$
 $a_1 + a_3 = 2a_2$

Пусть $\frac{1}{a+b} = a_1$; $\frac{1}{b+c} = a_2$; $\frac{1}{a+c} = a_3$.

Тогда $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} = \frac{2}{b+c}$

$$\frac{a+c + a+b}{(a+b)(a+c)} = \frac{2}{b+c}$$

$$\frac{2a+b+c}{a^2+a(b+c)+bc} = \frac{2}{b+c}$$

$$(2a+b+c)(b+c) = 2(a^2+a(b+c)+bc)$$

$$2ab+2ac+b^2+2bc+c^2 = 2a^2+2ab+2ac+2bc$$

$$b^2+c^2 = 2a^2$$

75

Согласно тождеству, $b^2; 2a^2; c^2$ — арифметическая прогрессия, это и требовалось доказать.

10.3. $\underbrace{6060606\dots0606}_{2024 \text{ раза } 06}$ — не квадрат натурального числа.

Доказано:

Если квадрат ~~числа~~ оканчивается на 6, значит ~~то~~ число оканчивается на 6 или 4.

$$6^2 = 36, \quad 4^2 = 16. \quad \text{Число десятков — нечётное.}$$

Возведём $(10a+b)$ в квадрат, где $b = 4$ или 6 , а a и b — натуральные числа.

$$(10a+b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$$

В $20ab$ количество десятков — чётное.

В b^2 количество десятков — нечётное.

чётное + нечётное = нечётное.

Значит квадрат натурального числа не может оканчиваться на 06, значит

$\underbrace{60606060606\dots0606}_{2024 \text{ раза } 06}$ — не квадрат натурального числа.

76

